

2021 年 3 月福州市高中毕业班质量检测

数学参考答案及评分细则

评分说明：

1. 本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制定相应的评分细则。

2. 对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应给分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分。

3. 解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

4. 只给整数分数。

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

- | | | | |
|------|------|------|------|
| 1. C | 2. B | 3. B | 4. A |
| 5. D | 6. C | 7. D | 8. C |

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

- | | | | |
|-------|---------|---------|---------|
| 9. AC | 10. ABD | 11. BCD | 12. BCD |
|-------|---------|---------|---------|

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

- | | | | |
|---------------|-------|-------------|-------------------|
| 13. $[-2, 4]$ | 14. 5 | 15. 25π | 16. $\frac{1}{2}$ |
|---------------|-------|-------------|-------------------|

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。

17. (本小题满分 10 分)

【命题意图】本小题主要考查等比数列、 a_n 与 S_n 的关系、数列求和等基础知识；考查推理论证能力、运算求解能力；考查化归与转化思想、函数与方程思想；考查逻辑推理、数学运算等核心素养，体现基础性、综合性。满分 10 分。

【解答】(1) 选①，即 $S_n = 2a_n + 1$. (i) 则

当 $n=1$ 时， $S_1 = 2a_1 + 1$ ，故 $a_1 = -1$ ； 1 分

当 $n \geq 2$ 时， $S_{n-1} = 2a_{n-1} + 1$ ，(ii)

(i) (ii) 两式相减得 $a_n = 2a_{n-1}$ ， 3 分

所以 $\{a_n\}$ 为等比数列，其中公比为 2，首项为 -1 4 分

所以 $a_n = -2^{n-1}$ 5 分

选②，即 $a_1 = -1, \log_2(a_n a_{n+1}) = 2n - 1$.

所以当 $n \geq 2$ 时， $\log_2(a_n a_{n+1}) - \log_2(a_{n-1} a_n) = 2$ ， 1 分

即 $\frac{a_{n+1}}{a_{n-1}} = 4$,2 分

所以 $\{a_{2k-1}\}$ ($k \in \mathbf{N}^*$) 为等比数列, 其中首项为 $a_1 = -1$, 公比为 4,

所以 $a_{2k-1} = -1 \times 4^{k-1} = -2^{(2k-1)-1}$3 分

由 $a_1 = -1, \log_2(a_1 a_2) = 1$, 得 $a_2 = -2$,

同理可得, $a_{2k} = -2 \times 4^{k-1} = -2^{2k-1}$ ($k \in \mathbf{N}^*$).4 分

综上, $a_n = -2^{n-1}$5 分

选③, 即 $a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$, $S_2 = -3$, $a_3 = -4$.

所以 $\{a_n\}$ 为等比数列, 设其公比为 q ,1 分

则 $\begin{cases} a_1(1+q) = -3, \\ a_1 q^2 = -4, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_1 = -1, \\ q = 2, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_1 = -9, \\ q = -\frac{2}{3}. \end{cases}$ 3 分

又因为 $\{a_n\}$ 为单调数列, 所以 $q > 0$, 故 $\begin{cases} a_1 = -1, \\ q = 2, \end{cases}$ 4 分

所以 $a_n = -2^{n-1}$5 分

(2) 由 (1) 知, $-na_n = n \cdot 2^{n-1}$,

所以 $T_n = 1 + 2 \times 2 + 3 \times 2^2 + \cdots + (n-1) \cdot 2^{n-2} + n \cdot 2^{n-1}$,6 分

$2T_n = 2 + 2 \times 2^2 + \cdots + (n-2) \cdot 2^{n-2} + (n-1) \cdot 2^{n-1} + n \cdot 2^n$,7 分

两式相减得 $-T_n = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-2} + 2^{n-1} - n \cdot 2^n$ 8 分

$= (2^n - 1) - n \cdot 2^n$9 分

所以 $T_n = (n-1) \cdot 2^n + 1$10 分

18. (本小题满分 12 分)

【命题意图】本小题主要考查解三角形等基础知识;考查推理论证能力、运算求解能力;考查函数与方程思想、数形结合思想;考查直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养,体现基础性、综合性. 满分 12 分.

【解答】解法一: (1) 因为 $a + b = c \cos B - b \cos C$,

由正弦定理得 $\sin A + \sin B = \sin C \cos B - \sin B \cos C$,2 分

因为 $\sin(B+C) = \sin(\pi - A) = \sin A$,

所以 $\sin(B+C) + \sin B = \sin C \cos B - \sin B \cos C$,3 分

所以 $2\sin B \cos C + \sin B = 0$,4 分

因为 $B \in (0, \pi)$, 所以 $\sin B \neq 0$, 所以 $\cos C = -\frac{1}{2}$,5 分

又 $C \in (0, \pi)$, 所以 $C = \frac{2\pi}{3}$6 分

(2) 因为 CD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, 且 $C = \frac{2\pi}{3}$,

所以 $\angle ACD = \angle BCD = \frac{\pi}{3}$7 分

在 $\triangle ABC$ 中, $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACD} + S_{\triangle BCD}$, 则由面积公式得

$$\frac{1}{2}CA \cdot CB \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2}CA \cdot CD \sin \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}CD \cdot CB \sin \frac{\pi}{3}, \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{即 } CA \cdot CB = CA \cdot CD + CD \cdot CB. \quad \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{两边同时除以 } CA \cdot CB \cdot CD \text{ 得 } \frac{1}{CA} + \frac{1}{CB} = \frac{1}{CD}. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

解法二: (1) 因为 $a + b = c \cos B - b \cos C$,

$$\text{由余弦定理得 } a + b = c \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} - b \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}, \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{整理得 } 2a(a + b) = 2c^2 - 2b^2, \text{ 即 } a^2 + b^2 - c^2 + ab = 0, \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } ab(1 + 2 \cos C) = 0, \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \cos C = -\frac{1}{2}, \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

又 $C \in (0, \pi)$, 所以 $C = \frac{2\pi}{3}$6 分

(2) 因为 CD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, 且 $C = \frac{2\pi}{3}$,

所以 $\angle ACD = \angle BCD = \frac{\pi}{3}$7 分

在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理得

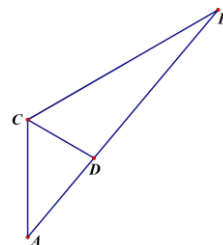
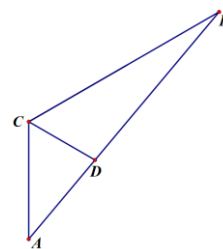
$$\frac{CA}{\sin B} = \frac{CB}{\sin A} = \frac{AB}{\sin \frac{2\pi}{3}}, \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{即 } \frac{CA}{\sin B} = \frac{CB}{\sin A} = \frac{AD}{\sin \frac{\pi}{3}} + \frac{DB}{\sin \frac{\pi}{3}}. \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

同理在 $\triangle CAD$ 和 $\triangle CBD$ 中, 得

$$\frac{CD}{\sin A} = \frac{AD}{\sin \frac{\pi}{3}}, \quad \frac{CD}{\sin B} = \frac{DB}{\sin \frac{\pi}{3}},$$

$$\text{所以 } \frac{CA}{\sin B} = \frac{CD}{\sin A} + \frac{CD}{\sin B}, \text{ 即 } \frac{CA - CD}{\sin B} = \frac{CD}{\sin A}, \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$



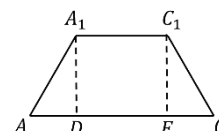
故 $\frac{CA-CD}{CA} = \frac{CD}{CB}$, 即 $1 = \frac{CD}{CB} + \frac{CD}{CA}$,11 分

故 $\frac{1}{CA} + \frac{1}{CB} = \frac{1}{CD}$12 分

19. (本小题满分 12 分)

【命题意图】本小题主要考查空间直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系等基础知识；考查推理论证能力、运算求解能力与空间想象能力；考查数形结合思想；考查直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养，体现基础性、综合性。满分 12 分。

【解答】(1) 依题意，四边形 ACC_1A_1 为等腰梯形，过 A_1, C_1 分别引 AC 的垂线，垂足分别为 D, E ，则



$AD = \frac{1}{2}(AC - A_1C_1) = \frac{1}{2} \times (2 - 1) = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}AA_1$ ，故 $\angle A_1AC = 60^\circ$ 。

在 $\triangle ACA_1$ 中， $A_1C^2 = A_1A^2 + AC^2 - 2A_1A \cdot AC \cos \angle A_1AC = 1^2 + 2^2 - 2 \times 1 \times 2 \times \frac{1}{2} = 3$ ，

所以 $A_1C^2 + A_1A^2 = AC^2$ ，故 $\angle AA_1C = 90^\circ$ ，即 $A_1C \perp AA_1$ 。2 分

因为 $A_1C \perp AB$ ， $AB \cap AA_1 = A$ ，且 $AB, AA_1 \subset$ 平面 ABB_1A_1 ，

所以 $A_1C \perp$ 平面 ABB_1A_1 ，4 分

因为 $A_1C \subset$ 平面 ACC_1A_1 ，

所以平面 $ACC_1A_1 \perp$ 平面 ABB_1A_1 。5 分

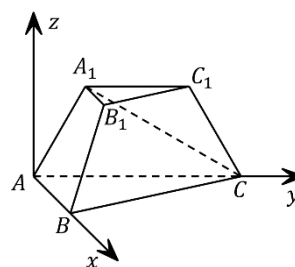
(2) 因为 $AB \perp AC$ ， $A_1C \perp AB$ ， $AC \cap A_1C = C$ ，且 $AC, A_1C \subset$ 平面 ACC_1A_1 ，

所以 $AB \perp$ 平面 ACC_1A_1 ，结合 (1) 可知 AB, AC, A_1D 三条直线两两垂直。6 分

以 A 为原点，分别以 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DA_1}$ 的方向为 x, y, z 轴的正方向，建立空间直角坐标系 $A-xyz$ ，如图所示，则各点坐标为

$A(0, 0, 0), B(1, 0, 0), C(0, 2, 0), A_1\left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ，

$C_1\left(0, \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 。7 分



由 (1) 知， $\mathbf{n}_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\overrightarrow{A_1C} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(0, \frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (0, \sqrt{3}, -1)$ 为平面 ABB_1A_1 的法向量。

.....8 分

$\overrightarrow{BC} = (-1, 2, 0), \overrightarrow{C_1C} = \left(0, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ，

设 $\mathbf{n}_2 = (x, y, z)$ 为平面 BCC_1B_1 的法向量，则

$$\begin{cases} \mathbf{n}_2 \perp \overrightarrow{BC}, \\ \mathbf{n}_2 \perp \overrightarrow{C_1C}, \end{cases} \text{ 故 } \begin{cases} \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{BC} = -x + 2y = 0, \\ \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{C_1C} = \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0, \end{cases} \text{ 取 } \mathbf{n}_2 = (2\sqrt{3}, \sqrt{3}, 1), \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|} = \frac{3-1}{2 \times 4} = \frac{1}{4}, \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{设二面角 } A-BB_1-C \text{ 的大小为 } \theta, \text{ 则 } \sin \theta = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

20. (本小题满分 12 分)

【命题意图】本小题主要考查直线与椭圆的位置关系等基础知识；考查推理论证能力、运算求解能力；考查函数与方程思想、数形结合思想、化归与转化思想；考查直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养，体现基础性、综合性与创新性. 满分 12 分.

【解答】解法一：(1) 依题意， $a = \sqrt{2}$. $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

由椭圆的对称性可知，四边形 $A_1B_2A_2B_1$ 为菱形，其周长为 $4\sqrt{a^2 + b^2} = 4\sqrt{3}$. $\dots\dots 3 \text{ 分}$

所以 $b = 1$, $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

所以 E 的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) 设 $P(x_0, y_0)$, 则 $2y_0^2 = 2 - x_0^2$, $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

直线 A_1P 的方程为 $y = \frac{y_0}{x_0 + \sqrt{2}}(x + \sqrt{2})$, 故 $C\left(0, \frac{\sqrt{2}y_0}{x_0 + \sqrt{2}}\right)$, $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

由 $A_1D \parallel PA_2$ 知 A_1D 的方程为 $y = \frac{y_0}{x_0 - \sqrt{2}}(x + \sqrt{2})$, 故 $D\left(0, \frac{\sqrt{2}y_0}{x_0 - \sqrt{2}}\right)$, $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

假设存在 $Q(t, 0)$, 使得 $\overrightarrow{QC} \cdot \overrightarrow{QD} = 3$, 则

$$\begin{aligned} \overrightarrow{QC} \cdot \overrightarrow{QD} &= \left(-t, \frac{\sqrt{2}y_0}{x_0 + \sqrt{2}}\right) \cdot \left(-t, \frac{\sqrt{2}y_0}{x_0 - \sqrt{2}}\right) \\ &= t^2 + \frac{2y_0^2}{x_0^2 - 2} \dots\dots\dots 9 \text{ 分} \\ &= t^2 + \frac{2 - x_0^2}{x_0^2 - 2} \\ &= t^2 - 1 \\ &= 3. \dots\dots\dots 10 \text{ 分} \end{aligned}$$

解得 $t = \pm 2$. $\dots\dots\dots 11 \text{ 分}$

所以当 Q 的坐标为 $(\pm 2, 0)$ 时, $\overrightarrow{QC} \cdot \overrightarrow{QD} = 3$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

解法二 (1) 同解法一. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) 当点 P 与点 B_1 重合时, C 点即 $B_1(0,1)$, 而点 D 即 $B_2(0,-1)$, 假设存在 $Q(t,0)$, 使得 $\overrightarrow{QC} \cdot \overrightarrow{QD} = 3$, 则 $(-t,1) \cdot (-t,-1) = 3$, 即 $t^2 - 1 = 3$, 解得 $t = \pm 2$6 分

以下证明当 Q 为 $(\pm 2,0)$ 时, $\overrightarrow{QC} \cdot \overrightarrow{QD} = 3$

设 $P(x_0, y_0)$, 则 $2y_0^2 = 2 - x_0^2$,7 分

直线 A_1P 的方程为 $y = \frac{y_0}{x_0 + \sqrt{2}}(x + \sqrt{2})$, 故 $C\left(0, \frac{\sqrt{2}y_0}{x_0 + \sqrt{2}}\right)$,8 分

由 $A_1D \parallel PA_2$ 知 A_1D 的方程为 $y = \frac{y_0}{x_0 - \sqrt{2}}(x + \sqrt{2})$, 故 $D\left(0, \frac{\sqrt{2}y_0}{x_0 - \sqrt{2}}\right)$,9 分

$$\begin{aligned} \text{所以 } \overrightarrow{QC} \cdot \overrightarrow{QD} &= \left(-t, \frac{\sqrt{2}y_0}{x_0 + \sqrt{2}}\right) \cdot \left(-t, \frac{\sqrt{2}y_0}{x_0 - \sqrt{2}}\right) \\ &= t^2 + \frac{2y_0^2}{x_0^2 - 2} \end{aligned} \quad \text{.....10 分}$$

$$= 4 + \frac{2 - x_0^2}{x_0^2 - 2} \quad \text{.....11 分}$$

$$= 4 - 1$$

$$= 3. \quad \text{.....12 分}$$

说明: Q 只求出 $(2,0)$ 或 $(-2,0)$, 不扣分.

21. (本小题满分 12 分)

【命题意图】本小题主要考查古典概型、概率分布列、等差数列、导数等基础知识;考查数据处理能力、推理论证能力、运算求解能力与创新意识;考查函数与方程思想、化归与转化思想、分类与整合思想、必然与或然思想;考查数学建模、逻辑推理、数学运算等核心素养,体现综合性、应用性与创新性. 满分 12 分.

【解答】(1) 设恰好有 3 个股东同时选择同一款理财产品的事件为 A , 由题意知, 5 个股东共有 4^5 种选择, 而恰好有 3 个股东同时选择同一款理财产品的可能情况为

$$C_5^3 \cdot (A_4^2 + A_4^3) \text{ 种,}$$

$$\text{所以 } P(A) = \frac{C_5^3 \cdot (A_4^2 + A_4^3)}{4^5} = \frac{45}{128}. \quad \text{.....4 分}$$

(2) ①2021 年全年该公司从协定存款中所得的利息为:

$$\begin{aligned} & \left[(550 + 500 + 450 + \cdots + 100 + 50) + 50 \right] \times \frac{0.0168}{12} \\ &= \left[\frac{550+50}{2} \times 11 + 50 \right] \times 0.0014 = 4.69 \text{ (万元)}. \end{aligned} \quad \text{.....6 分}$$

②由条件, 高新项目投资可得收益频率分布表

投资收益 t	$-\frac{x^3}{30\,000} + 0.02x^2 + 0.135x$	0	$-0.27x$
P	0.6	0.2	0.2

.....7 分

所以，高新项目投资所得收益的期望为：

$$E(t) = \left(-\frac{x^3}{30\,000} + 0.02x^2 + 0.135x \right) \times 0.6 + 0 \times 0.2 - 0.2 \times 0.27x = -0.000\,02x^3 + 0.012x^2 + 0.027x$$

所以，存款利息和投资高新项目所得的总收益的期望为：

$$L(x) = -0.000\,02x^3 + 0.012x^2 + 0.027x + 0.036 \times (500 - x) + 0.018 \times \frac{6}{12}x + 4.69$$

$$= -0.000\,02x^3 + 0.012x^2 + 22.69 \quad (0 \leq x \leq 500). \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$L'(x) = -0.000\,06(x^2 - 400x)$$

令 $L'(x) = 0$ ，得 $x = 400$ ，或 $x = 0$ 。

由 $L'(x) > 0$ ，得 $0 < x < 400$ ；由 $L'(x) < 0$ ，得 $400 < x < 500$ 。.....11 分

由条件可知，当 $x = 400$ 时， $L(x)$ 取得最大值为： $L(400) = 662.69$ （万元）。

所以当 $x = 400$ 时，该公司 2021 年存款利息和投资高新项目所得的总收益的期望取得最大值 662.69 万元。.....12 分

22. （本小题满分 12 分）

【解答】解法一：（1）依题意， $f'(x) = x(x+2)e^x$ ，则1 分

当 $x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ 时， $f'(x) > 0$ ；当 $x \in (-2, 0)$ 时， $f'(x) < 0$ ；2 分

所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, -2), (0, +\infty)$ 上单调递增，在区间 $(-2, 0)$ 上单调递减。.....3 分

因为 $f(-2) = \frac{4}{e^2} - 1 < 0$ ， $f(1) = e - 1 > 0$ ，

所以 $f(x)$ 有且只有 1 个零点。.....5 分

（2）令 $F(x) = x^2e^x - a(2\ln x + x) - 1$ ，则

$$F'(x) = x(x+2)e^x - \frac{a(x+2)}{x} = \frac{(x+2)(x^2e^x - a)}{x} \quad (x > 0). \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

①若 $a \leq 0$ ，则 $F'(x) > 0$ ， $F(x)$ 为增函数，

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{e}}{4} - 1 - a\left(2\ln\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{e}}{4} - 1 - a\left(\frac{1}{2} - \ln 4\right) < 0，\text{不合题意；} \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

②若 $a > 0$ ，令 $h(x) = x^2e^x (x > 0)$ ，易知 $h(x)$ 单调递增，且值域为 $(0, +\infty)$ ，则存在 $x_0 > 0$ ，使得 $x_0^2e^{x_0} = a$ ，即 $2\ln x_0 + x_0 = \ln a$ 。.....8 分

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $F'(x) < 0$, $F(x)$ 单调递减;

当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $F'(x) > 0$, $F(x)$ 单调递增.

$$F(x)_{\min} = F(x_0) = x_0^2 e^{x_0} - a(2\ln x_0 + x_0) - 1 = a - a\ln a - 1, \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{令 } \varphi(a) = a - a\ln a - 1, \quad \varphi'(a) = -\ln a,$$

当 $0 < a < 1$ 时, $\varphi'(a) = -\ln a > 0$; 当 $a > 1$ 时, $\varphi'(a) = -\ln a < 0$;

所以 $\varphi(a) \leq \varphi(1) = 0$,

由 $F(x) \geq 0$ 得 $\varphi(a) \geq 0$, 所以 $a = 1$. $\dots\dots\dots 11 \text{ 分}$

综上, a 的取值范围是 $\{1\}$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

解法二: (1) 同解法一. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) 令 $t = x^2 e^x$, 当 $x > 0$ 时, $t > 0$,

则 $\ln t = 2\ln x + x$, 故 $f(x) \geq a(2\ln x + x) \Leftrightarrow t - 1 \geq a\ln t$. $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

$$\text{令 } F(t) = t - 1 - a\ln t, \text{ 则 } F'(t) = 1 - \frac{a}{t} = \frac{t-a}{t}, \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

①若 $a \leq 0$, 则 $F'(t) > 0$, $F(x)$ 为增函数, 又 $F(1) = 0$, 故当 $0 < t < 1$ 时, $F(t) < 0$, 不合题意. $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

②若 $a > 0$, 则当 $t \in (0, a)$ 时, $F'(t) < 0$; 当 $t \in (a, +\infty)$ 时, $F'(t) > 0$;

所以 $F(t)$ 在区间 $(0, a)$ 上单调递减, 在区间 $(a, +\infty)$ 上单调递增,

因为 $F(1) = 0$, 所以

若 $a > 1$, 则当 $t \in (1, a)$ 时 $F(t) < 0$, 不合题意;

若 $0 < a < 1$, 则当 $t \in (a, 1)$ 时 $F(t) < 0$, 不合题意;

若 $a = 1$, 则 $F(t) \geq F(1) = 0$, 符合题意. $\dots\dots\dots 11 \text{ 分}$

综上, a 的取值范围是 $\{1\}$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$